Lokální extrémy reálných funkcí jedné reálné proměnné

Postup: Budeme uvažovat funkce, které jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru. Zadanou funkci $y = f(x)$ zderivujeme a derivaci upravíme na co nejednodušší tvar. Zásadně při úpravách preferujeme vytýkání a rozkládání na součin před roznásobováním závorek! Také se snažíme co nejvíce provádět krácení! Máme-li takto upravenou derivaci $y' = f'(x)$ (viz. příklady níže), určíme stacionární body (tj. body kde je derivace nulová) a body, kde derivace neexistuje. Tyto body, společně s body omezujícími definiční obor funkce $y = f(x)$ (jsou-li nějaké) vyneseme na reálnou osu. Tím se osa rozpadne na několik intervalů. Z každého intervalu vybereme jednoho reprezentanta a dosadíme do vzorce pro derivaci y' (není-li funkce na některém intervalu definována, přejdeme k dalšímu intervalu). Je-li hodnota takto získané derivace kladná, je kladná i v celém příslušném intervalu a funkce je na tomto intervalu rostoucí. Podobně, funkce je klesající na intervalu, kde je hodnota derivace záporná. Lokální extrém potom nastává v bodě, který patří do definičního oboru funkce $y = f(x)$ a ve kterém se mění charakter monotonosti, nebo v bodě, který je krajním bodem definičního oboru funkce, patří do definičního oboru a na příslušnou stranu od tohoto bodu je funkce rostoucí nebo klesající (viz. příklad s funkcí $y = \sqrt{2x - x^2}$).

V následujících příkladech jsou naznačena řešení úloh na hledání lokálních extrémů. Je zde vypočtena derivace, naznačeno schema, ze kterého je zřejmé, kde je funkce rostoucí a klesající a vyznačeny body v nichž nastává lokální extrém.

Pozn.: podobná situace platí, zaměníme-li $f'(x)$ za $f''(x)$, slova rostoucí za konvexní, klesající za konkávní a lokální extrém za inflexní bod.

1. $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ Návod: $y' = -\frac{4}{9}x(x^2 - 3)$, $\nearrow \text{MAX} \searrow \; \text{min} \; \nearrow \text{MAX} \searrow$; body $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$

2. $y = 4x^3 - 3x^4$ Návod: $y' = 12x^2(1 - x)$, $\nearrow \; \nearrow \text{MAX} \searrow$; body 0, 1

3. $y = -2 + 12x - x^3$ Návod: $y' = 3(2 - x)(2 + x)$, $\searrow \text{min} \nearrow \text{MAX} \searrow$; body -2, 2

4. $y = x + \frac{4}{x}$ Návod: $y' = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$, $\nearrow \text{MAX} \searrow \circ \searrow \text{min} \nearrow$; body -2, 0, 2

5. $y = \frac{x}{(x+1)^2}$ Návod: $y' = \frac{1-x}{(x+1)^3}$, $\searrow \circ \nearrow \text{MAX} \searrow$; body -1, 1

6. $y = x^2 - 2\ln x$ Návod: $y' = 2\frac{(x-1)(x+1)}{x}$, $\emptyset \circ \searrow \text{min} \nearrow$; body 0, 1

7. $y = (3 - x)\sqrt{x}$ Návod: $y' = \frac{3}{2\sqrt{x}}(1 - x)$, $\emptyset \; \text{min} \nearrow \text{MAX} \searrow$; body 0, 1

8. $y = 2\sqrt{x} - x$ Návod: $y' = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $\emptyset \; \text{min} \nearrow \text{MAX} \searrow$; body 0, 1

9. $y = \frac{x^2}{1-x}$ Návod: $y' = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$, $\searrow \text{min} \nearrow \circ \nearrow \text{MAX} \searrow$; body 0, 1, 2

10. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{4}$ Návod: $y' = -2x(x-1)(x+1)$, $\nearrow \underset{-1}{\text{MAX}} \searrow \underset{0}{\text{min}} \nearrow \underset{1}{\text{MAX}} \searrow$

11. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ Návod: $y' = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $\searrow \underset{-\frac{1}{2}}{\text{min}} \nearrow$

12. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ Návod: $y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\searrow \underset{0}{\text{min}} \nearrow$

13. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ Návod: $y' = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}$, $\searrow \underset{-1}{\text{min}} \nearrow \underset{1}{\circ} \searrow$

14. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$ Návod: $y' = -8\frac{(x+1)^3}{(x-1)^5}$, $\searrow \underset{-1}{\text{min}} \nearrow \underset{1}{\circ} \searrow$

15. $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ Návod: $y' = \frac{1}{3}\,\frac{4-3x}{\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$, $\searrow \underset{0}{\text{min}} \nearrow \underset{\frac{4}{3}}{\text{MAX}} \searrow \underset{2}{|} \searrow$

16. $y = \frac{x}{1+x^2}$ Návod: $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\searrow \underset{-1}{\text{min}} \nearrow \underset{1}{\text{MAX}} \searrow$

17. $y = \frac{1-x^3}{x^2}$ Návod: $y' = -\frac{x^3+2}{x^3}$, $\searrow \underset{\sqrt[3]{2}}{\text{min}} \nearrow \underset{0}{\circ} \searrow$

18. $y = \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}$ Návod: $y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$, $\searrow \underset{-1}{\circ} \searrow \underset{0}{\text{min}} \nearrow \underset{1}{\circ} \nearrow$

19. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ Návod: $y' = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$, $\emptyset \underset{0}{\circ} \searrow \underset{1}{\text{min}} \nearrow \underset{e^2}{\text{MAX}} \searrow$

20. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ Návod: $y' = \frac{2-\ln x}{3x^{\frac{3}{2}}}$, $\emptyset \underset{0}{\circ} \nearrow \underset{e^2}{\text{MAX}} \searrow$

21. $y = \frac{e^x}{1+x}$ Návod: $y' = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, $\searrow \underset{-1}{\circ} \searrow \underset{0}{\text{min}} \nearrow$

22. $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$ Návod: $y' = e^{-x}\,\frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x}}$, $\searrow \underset{0}{\text{min}} \nearrow \underset{\frac{2}{3}}{\text{MAX}} \searrow$

23. $y = x^2 e^{-x}$ Návod: $y' = e^{-x}x(2-x)$, $\searrow \underset{0}{\text{min}} \nearrow \underset{2}{\text{MAX}} \searrow$

24. $y = xe^{\frac{1}{x}}$ Návod: $y' = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x-1}{x}$, $\nearrow \underset{0}{\circ} \searrow \underset{1}{\text{min}} \nearrow$

25. $y = x - \ln(1+x)$ Návod: $y' = \frac{x^2+x-1}{x+1}$, $\emptyset \underset{-1}{\circ} \searrow \underset{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\text{min}} \nearrow$

26. $y = x - \ln(1+x^2)$ Návod: $y' = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $\nearrow \underset{1}{|} \nearrow$

27. $y = e^{-x}\sin x$ Návod: $y' = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, $\underset{-\frac{3}{4}\pi}{\text{min}} \nearrow \underset{\frac{\pi}{4}}{\text{MAX}} \searrow \underset{\frac{5\pi}{4}}{\text{min}} \nearrow \underset{\frac{9}{4}\pi}{\text{MAX}}$ a 2π-periodicky

28. $y = x + \frac{2x}{1+x^2}$ Návod: $y' = \frac{x^4+3}{(x^2+1)^2}$, $\nearrow$

29. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3}$ Návod: $y' = \frac{x^5-24}{x^4}$, $\searrow \; 0 \; \searrow \; \text{min} \; \sqrt[5]{24} \; \nearrow$

30. $y = \sqrt{2x - x^2}$ Návod: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$, $\emptyset \; \text{min} \; 0 \; \nearrow \; \text{MAX} \; 1 \; \searrow \; \text{min} \; 2 \; \emptyset$

31. $y = (x+1)^{10}e^{-x}$ Návod: $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$, $\searrow \; \text{min} \; -1 \; \nearrow \; \text{MAX} \; 9 \; \searrow$

32. $y = \frac{x^2}{2^x}$ Návod: $y' = \frac{x(2-x\ln 2)}{2^x}$, $\searrow \; \text{min} \; 0 \; \nearrow \; \text{MAX} \; \frac{2}{\ln 2} \; \searrow$

Další funkce: $\frac{2x}{1+x^2}$, xe^{-x}, $x\sqrt[3]{x-1}$, $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$, $\sqrt{x}\ln x$, $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Určete inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti

33. $y = xe^{-x}$ Návod: $y'' = -e^{-x}(2-x)$, $\cap \; \text{in.} \; 2 \; \cup$

34. $y = \frac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$ Návod: $y'' = 4\frac{x+2}{(x-1)^4}$, $\cap \; \text{in.} \; -2 \; \cup \; 1 \; \cup$

35. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ Návod: $y'' = 2 - 6x^2$, $\cap \; \text{in.} \; -\frac{\sqrt{3}}{3} \; \cup \; \text{in.} \; \frac{\sqrt{3}}{3} \; \cap$

36. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ Návod: $y'' = -6\frac{x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$, $\cup \; -\sqrt{3} \; \cap \; \text{in.} \; 0 \; \cup \; \sqrt{3} \; \cap$

37. $y = \frac{x^2+7}{x^2+3}$ Návod: $y'' = 24\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+3}$, $\cup \; \text{in.} \; -1 \; \cap \; \text{in.} \; 1 \; \cup$

38. $y = \frac{x}{x^2+1}$ Návod: $y'' = 2\frac{x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, $\cap \; \text{in.} \; -\sqrt{3} \; \cup \; \text{in.} \; 0 \; \cap \; \text{in.} \; \sqrt{3} \; \cup$

39. $y = x^2e^{x-2}$ Návod: $y'' = (x^2+4x+2)e^{x-2}$, $\cup \; \text{in.} \; -2-\sqrt{2} \; \cap \; \text{in.} \; -2+\sqrt{2} \; \cup$

40. $y = (x^2+1)e^{-x^2}$ Návod: $y'' = 2x^2e^{-x^2}(2x^2-3)$, $\cup \; \text{in.} \; -\sqrt{\frac{3}{2}} \; \cap \; 0 \; \cap \; \text{in.} \; \sqrt{\frac{3}{2}} \; \cup$

41. $y = \frac{e^x}{x+1}$ Návod: $y'' = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$, $\cap \; -1 \; \cup$

42. $y = \frac{x^3+2}{2x}$ Návod: $y'' = \frac{x^3+2}{x^3}$, $\cup \; \text{in.} \; -\sqrt[3]{2} \; \cap \; 0 \; \cup$